DLAパターンの異方性(拡散に支配された凝集(DLA)とそれに関連した現象,研究会報告)

AUTHOR(S):

近藤, 宏

Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1315.
(7) H. Honjo, S. Ohta and M. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2487.
(8) K. Honda, H. Toyoki and M. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 707.
(9) S. Goldsztanb and R. Kern, Acta Cryst. **6** (1953) 842.
(10) H. Honjo, S. Ohta and Y. Sawada, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 841.
(11) J. S. Langer and H. Müller-Krumbhaar, Acta Metall. **26** (1978) 1681, 1689, 1697.
(12) D. A. Kessler, J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. A**33** (1986) 3352.
(13) A. Barbieri, D. C. Hong and J. S. Langer, Phys. Rev. A February (1987).
(14) D. A. Kessler and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 3069.
(15) S. Liang, Phys. Rev. A**33** (1986) 2663.
(16) Y. Couder, N. Gérard and M. Raband, Phys. Rev. A**34** (1986) 5175.
(17) D. C. Hong and J. S. Langer, to be published.

ＤＬＡパターンの異方性

東北大・電子工学（通研）　近　藤　　宏

フラクタルは普通，自己相似性，スケール不変性，膨張対称性などと言い換えることがある。これら三語はほぼ同義語である。ここで，相似変換の一般化であるアフィン変換に呼応させて，自己相似に対する自己アフィン性も定義でき，“Self-affine fractal”の概念が当然存在する（これもマンデルブローによる)。自己アフィン性とはスケール不変性が方向に依存することであり，膨張に関しては自己相似性に比べて対称性が低くなる。そこに自己相似フラクタルには見られなかった面白い性質が顕現する秘密がある。以下に，自己相似フラクタルと自己アフィンフラクタルを比較することを主に述べ，異方的成長をするＤＬＡの例を簡単に示す。（空間次元が２の場合に限って議論する）

§自己相似フラクタルと自己アフィンフラクタル

図１はSierpiński carpetと呼ばれる自己相似フラクタル生成のためのジェネレーターである。黒いBoxに元の全体の図形の縮小したものを「内挿」する操作を無限に繰り返すことにより，内部にフラクタル構造ができる。逆に「外挿」により成長パターンの様に，外部へ次々と拡大して行ってもよい。相似変換であるから当然「穴」などの特徴的かたちは，いかなるスケ

ールでも変わらないように見える。フラクタル次元は，縦・横，各 $b=3$ 等分して $N=8$ 個残すことから

$$D=\log N/\log b \qquad [式1]$$

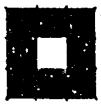

図1

図2

と定義する。

一方図2のジェネレーターでは自己アフィンフラクタルの図形が出来るのであるが，縦を $b''=3$ 行，横を $b''=4$ 列に分割して $N=10$ 個残す。自己相似フラクタルとは，この縦横の分割の仕方が異なっている点しかないが，実はこれによって大きな相違が生まれてくるのである。第一に，方向依存性のためにスケールが複数個生じ，式1によって次元を決めることが出来なくなる。さらにジェネレーターの内挿と外挿の違いでも，結果として得られる図形は感覚的に異なってくる。つまり，内挿の場合「穴」は縦長，外挿の場合「穴」や全体の形が横長になってしまう。マンデルブローは内挿と外挿とで，次元を測るためのスケールを別々にし，前者をlocal box dimension，後者をglobal box dimensionと呼んだ。結果は式1と似た形で書くことができ，

$$D_{\rm BL}=\log(Nb'/b'')/\log b' \qquad [式2a]$$

$$D_{\rm BG}=\log(Nb''/b')/\log b'' \qquad [式2b]$$

それぞれ一辺が b'^{-k}，b''^{-k} (integer $k>0$)のBoxで被うに要する個数が(…)であることを示している。その意味で，自己アフィンフラクタルでも自己相似フラクタルとそれほど変わらない構造を持っている，と言うことができよう。

§ 自己アフィンフラクタル成長

成長するフラクタルパターンはDiffusion-limited Aggregation model に代表されるが，その(自己相似)フラクタル次元 D はgyration半径 R_g と構成粒子数 N のスケーリング関係

$$N\sim R_g{}^D \qquad [式3]$$

から求められる。これは非常に大きな N に至るまで保ち続けることが知られている(但しoff-lattice aggregationの場合)。ところが，DLAのルールに何らかの方向性のある要因が加わると，この関係の意味がなくなることがある。L をパターンの長さ，W を幅として，

$$L\sim N^{\nu_{/\!/}},\quad W\sim N^{\nu_\perp},\quad \nu_{/\!/}>\nu_\perp \qquad [式4]$$

のように異方的に成長することがある。これは自己アフィン性を意味しており，Dの代わりに2個のexponentでパターンが特徴づけられることになる。外形は確かにアフィン的ではあるが，内部構造はどうなっているのだろうか。図3のようにDLAが十字形に成長するルールもあるが，その一本の大枝の長さをL，幅をWとすると，構成粒子数Nとの関係は，

$$N \sim (L/W) \cdot W^{D} \qquad \text{[式5]}$$

と書ける。これは，直径Wのフラクタル塊（次元D）がL/W個あることを示している。これと式4より，

$$D = 1 + (1 - \nu_{/\!/}) / \nu_{\perp} \qquad \text{[式6]}$$

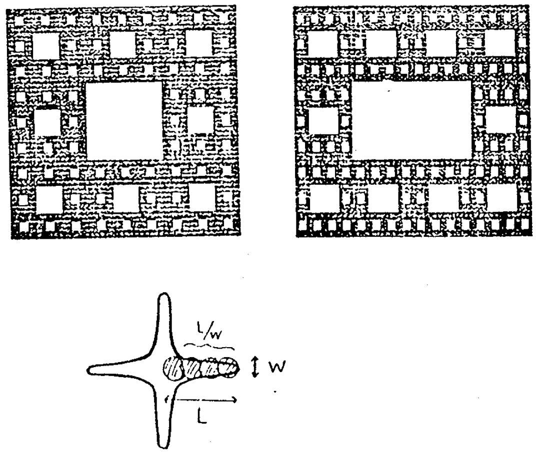

図　3

という関係が出てくる。図3の様な自己アフィン図形を式3で次元を測ると

$$R_{\mathrm{g}} \propto L \sim N^{\nu_{/\!/}} \qquad D = 1/\nu_{/\!/} \quad ?$$

ということになり，Dが$\nu_{/\!/}$と$\nu_{\perp}$の両方で決まることに反し，無意味となる。詳細は略すが，

$$\nu_{/\!/} = \log b' / \log N, \qquad \nu_{\perp} = \log b'' / \log N$$

を式6に代入するとD_{BG}の表式と全く同じになり，成長型のフラクタル図形は，ジェネレーターの外挿の場合に相当することとなり，矛盾しない。しかしフラクタル成長の場合はD_{BL}は特に意味はない。

§ 具体例　DLAの場合

1）$\nu_{/\!/} = 2/3$，$\nu_{\perp} = 1/2$；$D = 2$

異方的Sticking確率をもつDLA

パターンは目で見てもコンパクト（$D = 2$）である。

2）$\nu_{/\!/} = 2/3$，$\nu_{\perp} = 1/2$；$D = 5/3$

モンテカルロ法に平均化操作を加えたDLA，V字型の吸収壁を与えられたDLA，

（Coarse-grained　lattice上のDLA，巨大サイズ（$N \sim 10^{7}$）DLAは未確認）。

外形は異方的ではあるが，内部構造に関してはNormal DLAと変わらないことを示している。

§結　び

自己相似フラクタルを拡張した自己アフィンフラクタルは，以上に示した通り多様性に富み，DLAに限らず，応用が自己相似フラクタルよりも広い範囲に拡大された。既存するパターンについても自己アフィンという立場からもう一度見直すことにより，今迄意味のわからなかった問題が，見通しのよいものになることであろう。自己相似フラクタル以上に自己アフィン性や自己アフィンフラクタルは普遍的に存在しているに違いない。

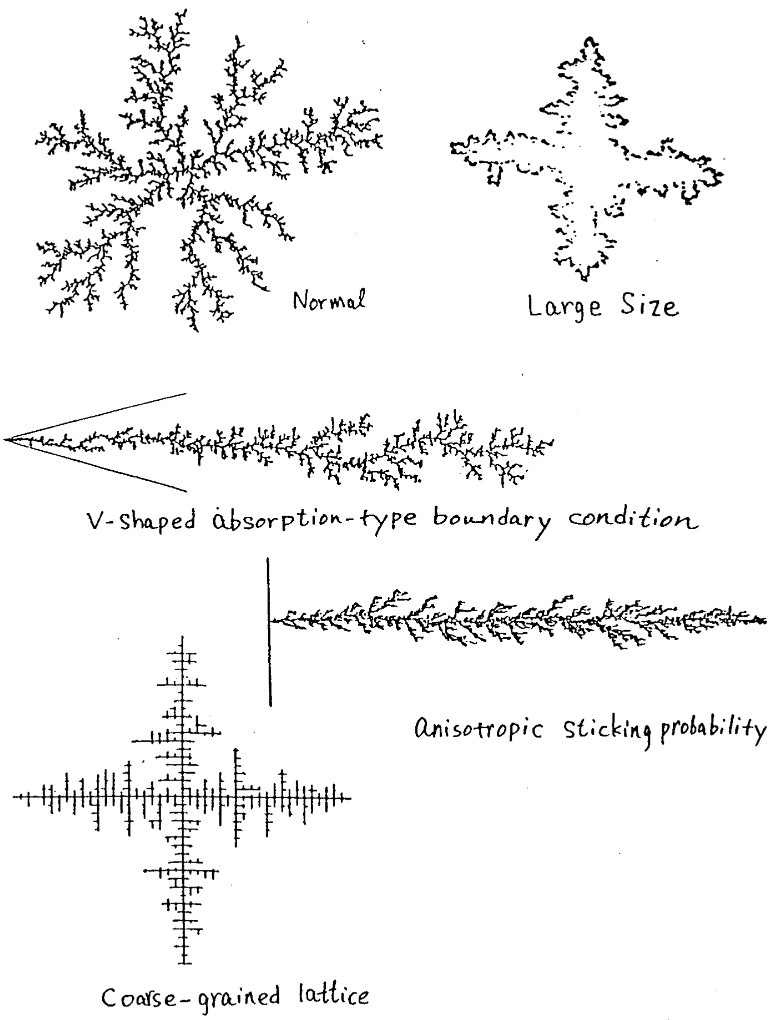

図　4

参考文献

Mandelbrot: *Self-affine fractal Sets*; FRACTALS IN PHYSICS; editor: L. Pietronero, E. Tosatti 1986.